Realizacja ćwiczeń. Semestr letni 2020.

Uaktualnienie: 15 marca 2020

Stanisław Jaworski

KEiS
SGGW
Nowoursynowska 159, PL-02-787 Warszawa
e-mail: stanislaw_jaworski@sggw.pl

Spis treści

1 Rachunek prawdopodobieństwa - stacjonarne **3**
1.1 Ćwiczenia - wstęp 3
1.2 Ćwiczenia – prawdopodobieństwo całkowite, zasada Bayesa . . 3
1.3 Ćwiczenia – zmienne losowe 3

2 Metody reprezentacyjne - niestacjonarne **9**
2.1 Ćwiczenia - wstęp 9

3 Statystyka opisowa i ekonomiczna - stacjonarne **10**
3.1 Ćwiczenia - wstęp 10
3.2 Ćwiczenia - mierniki położenia wyznaczane z szeregu rozdzielczego 10
3.3 Ćwiczenia - mierniki zróżnicowania oraz współczynnik koncentracji Lorenza wyznaczane z szeregu rozdzielczego 11
3.4 Ćwiczenia - wskaźniki dynamiki zmian 14

1. Rachunek prawdopodobieństwa - stacjonarne

1.1 Ćwiczenia - wstęp

Przykłady na ćwiczeniach.

Przykład 1.
Rzucamy trzy razy kostką do gry. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wypadnie przynajmniej jedna szóstka.

1. Rozwiązanie zadania przy założeniu, że kostka jest symetryczna.
2. Dyskusja o modelu probabilistycznym. Określenie zdarzeń elementarnych, zdarzeń losowych oraz konstrukcja prawdopodobieństwa przy założeniu, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Przykład 2.
Rzucamy symetryczną kostką do gry. Wiadomo, że wypadła przynajmniej jedna jedynka. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wypadnie przynajmniej jedna szóstka.

1. Rozwiązanie zadania w przypadku, gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych obejmuje tylko wyniki z jedynką:
$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3 : x_1 = 1 \vee x_2 = 1 \vee x_3 = 1\}$$
2. Rozwiązanie zadania w przypadku, gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych obejmuje wszystkie rzuty: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$.

Do domu.

Zadanie 1.
Rozwiązać przykład 2 w przypadku, gdy szóstka wypada dwa razy częściej niż pozostałe jednakowo prawdopodobne przypadki.

1.2 Ćwiczenia – prawdopodobieństwo całkowite, zasada Bayesa

1.3 Ćwiczenia – zmienne losowe

Przykłady na ćwiczeniach.

Przykład 3.
Z urny, w której jest pięć kul białych, trzy czerwone i dwie zielone losujemy ze zwracaniem cztery kule. Podać rozkład liczby wylosowanych kul białych, dystrybuantę odpowiedniej zmiennej losowej i jej wartość oczekiwaną.

Rozwiązanie

Niech X oznacza liczbę wylosowanych kul białych na 4 wylosowane ze zwracaniem. Chcę wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Dokładniej, chcę podać $P(X = k)$ dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Zdarzenie elementarne polegające na tym, za pierwszym razem i za czwartym razem zostanie wylosowana kula biała, a w pozostałych losowaniach kula innego koloru można zapisać za pomocą wektora $(1, 0, 0, 1)$. Stąd przestrzeń zdarzeń elementarnych zapiszemy następująco: $\Omega = \{0, 1\}^4$. Zmienna losowa X jest funkcją rzeczywistą określoną na Ω:

$$X(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Zapis $X = k$ rozumiem jako zdarzenie losowe:

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k\}.$$

Jeżeli przez p oznaczę prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w pojedynczym losowaniu, to $P(1, 0, 0, 1) = p^2(1 - p)^2$. Uogólniając mamy

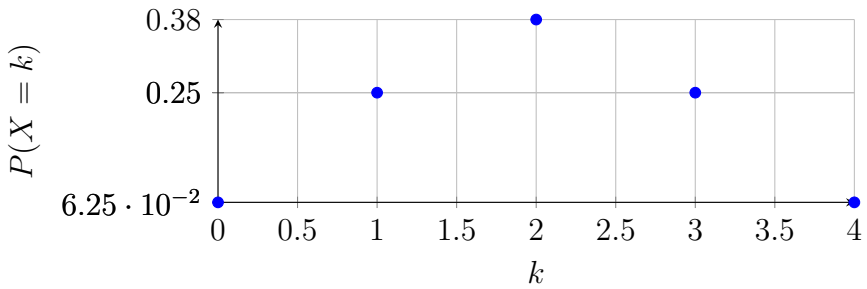
$$P(X = 2) = \binom{4}{2} p^2(1 - p)^2,$$

ponieważ wszystkich wektorów o dwóch jedynkach i dwóch zerach jest $\binom{4}{2}$. Zatem ostatecznie

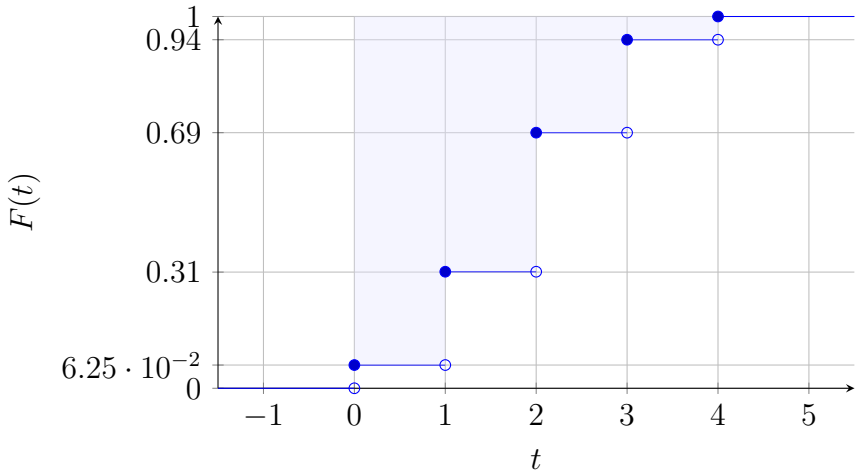
$$P(X = k) = \binom{4}{k} p^k(1 - p)^{4-k}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Mamy zatem rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, gdyż jak łatwo sprawdzić $p = 1/2$. Wykres rozkładu prawdopodobieństwa zmienne X przedstawia rysunek: Dystrybuanta F zmiennej losowej X zgodnie z definicją to funkcja $F : \mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$ określona wzorem

$$F(t) = P(X \leq t), \text{ dla } t \in \mathbb{R}.$$



Rysunek 1. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X



Rysunek 2. Dystrybuanta zmiennej losowej X

Zatem w naszym zadaniu $F(t) = \sum\limits_{k \leq t} \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k} = \sum\limits_{k \leq t} \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Na przykład $F(-2) = 0$, $F(5.3) = 1$ oraz $F(2.02) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Wartość oczekiwaną zmiennej losowej X oznaczamy przez EX. Mówi ona o tym, jaką wartość przyjmuje *średnio* zmienna losowa X. Popatrzmy na rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej (Rysunek 1). Równie rzadko przyjmuje ona wartość 0 co 4, czyli średnio 2. Równie często przyjmuje 1, co 3, czyli średnio 2. No i akurat najczęściej wartość 2. Rozkład jest symetryczny względem 2. Wnioskuję, że $EX = 2$. Formalna definicja wartości oczekiwanej zostanie przedstawiona na wykładzie. Zgodnie z tą definicją $EX = \sum_{k=0}^{4} k \cdot P(X = k)$.

Przykład 4.
Michał przychodzi na przystanek zawsze w godzinach od 12-ej do 14-ej, a Zosia od 13-ej do 15-ej. Oboje przychodzą niezależnie od siebie. Szansa, że Michał przyjdzie w czasie t minut od 12-ej wynosi $t/120$. Szansa, że Zosia przyjdzie w czasie m minut od 13-ej wynosi $(m/120)^2$.

a) Niech G oznacza godzinę, o której Michał przyjdzie na przystanek. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej G.

Rozwiązanie

Niech M oznacza dystrybuantę zmiennej losowej G. Łatwo zauważyć, że

$$M(g) = \begin{cases} 0 & \text{dla } g \leq 12 \\ (g-12)/2 & \text{dla } g \in (12, 14) \\ 1 & \text{dla } g \geq 14 \end{cases}$$

Wyjaśnienie: Jeżeli G oznacza godzinę/moment przyjścia (w liczbach rzeczywistych), to $(G-12)\cdot 60$ oznacza liczbę minut od 12-ej. Zatem dla $g \in (12, 14)$ zachodzi

$$M(g) = P\{G \leq g\} = P\{(G-12)\cdot 60) \leq (g-12)\cdot 60\} = \\ = ((g-12)\cdot 60)/120 = (g-12)/2$$

b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że Zosia przyjdzie na przystanek do godziny 13.20.

Rozwiązanie

Niech Z oznacza dystrybuantę dla godziny przyjścia Zosi. Wyznaczamy tę dystrybuantę alanlogicznie do poprzedniego punktu.

$$Z(g) = \begin{cases} 0 & \text{dla } g \leq 15 \\ ((g-13)/2)^2 & \text{dla } g \in (13, 15) \\ 1 & \text{dla } g \geq 15 \end{cases}$$

Zatem prawdopodobieństwo, że Zosia przyjdzie na przystanek do godziny 13.20 wynosi $Z(13\frac{20}{60}) = (20/120)^2$. Oczywiście nie trzeba było wyznaczać dystrybuanty Z, aby podać ten wynik.

c) Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że zarówno Zosia, jak i Michał przyjdą na przystanek do godziny 13.30.

Rozwiązanie

Szukane prawdopodobieństwo, przyjmując niezależność momentów przyjścia Zosi i Michała, to $M(13\frac{30}{60})Z(13\frac{30}{60}) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$

d) Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że Zosia przyjdzie na przystanek przed Michałem.

Rozwiązanie

Szanowni Studenci, to rozwiązanie stanie się dla Państwa jasne dopiero po przerobieniu tematów: suma niezależnych zmiennych losowych oraz warunkowa wartość oczekiwana. Dlatego to rozwiązanie przeczytacie ze zrozumieniem w późniejszym terminie.

Niech H oznacza godzinę przyjścia Zosi na przystanek. Prawdopodobieństwo, że Zosia przyjdzie przed Michałem wynosi $P(H < G)$; prawdopodobieństwo to można wyznaczyć następująco

1. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej $X = H - G$. Oznaczmy ją przez F.
2. Policzyć $F(0)$.

Przy wyznaczaniu dystrybuanty F możemy skorzystać ze znanych wzorów na rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych, zauważając, że $H - G = H + (-G)$ (musimy jednak wtedy wyznaczyć dodatkowo rozkład zmiennej losowej $(-G)$).
Łatwiej jest skorzystać z faktu, że $F(t) = E(F(t|G))$, gdzie $F(t|G)$ oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X pod warunkiem zmiennej losowej G.
Zatem

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_R F(t|G=g)M(dg) = \int_R P(H-G<t|G=g)M(dg) = \\ &= \int_R P(H<t+g|G=g)M(dg) = \\ &= \int_R P(H<t+g)M(dg) = \int_R Z(t+g)M(dg) \end{aligned}$$

W przedostatniej równości wykorzystano niezależność momentów przyjścia. Zatem

$$F(0) = \int_R Z(g)M(dg) = \int_{12}^{14} Z(g)M'(g)\,dg = \int_{12}^{14} Z(g)\frac{1}{2}\,dg =$$
$$= \int_{12}^{13} 0 \cdot \frac{1}{2}\,dg + \int_{13}^{14} ((g-13)/2)^2 \cdot \frac{1}{2}\,dg = 0 + \frac{1}{24}$$

Stąd prawdopodobieństwo, że Zosia przyjdzie na przystanek przed Michałem wynosi 1/24.

Zadania domowe.

Zadanie 2.
Wyznaczyć pole zacieniowanego obszaru na rysunku 1. i porównać z wartością oczekiwaną EX z przykładu 3. Jeżeli wyjdzie coś ciekawego, dobrze jest udowodnić, że to nie przypadek.

Zadanie 3.
Rzucamy dwiema kostkami. Niech zmienną losową będzie różnica oczek. Podać rozkład tej zmiennej losowej, jej dystrybuantę oraz wartość oczekiwaną. Narysować zarówno rozkład tej zmiennej losowej, jak i jej dystrybuantę.

Zadanie 4.
Obok pewnej stacji CPN przejeżdża średnio 3 razy więcej samochodów ciężarowych niż osobowych. Prawdopodobieństwo, że przejeżdżający samochód osobowy będzie nabierał paliwo wynosi 0.2, a ciężarowy 0.05.

1. Wiadomo, że jeżeli obok stacji przejeżdża 8 samochodów, to część z nich nabiera paliwo. Niech X oznacza ich zmienną liczbę. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej oraz naszkicować jej dystrybuantę.
2. Powiadomiono nas, że 10 samochodów nabierało paliwo. Część z nich to były samochody osobowe. Nie znamy ich liczby, ale chcemy określić ich najbardziej prawdopodobną liczbę. Jaka to liczba?

2. Metody reprezentacyjne - niestacjonarne

2.1 Ćwiczenia - wstęp

Przykład 5.
W tabeli zamieszczono wagi czterech noworodków (w funtach):

Dziecko	A	B	C	D
Waga	5.5	8.0	6.5	7.0

1. Wypisz wszystkie możliwe próby rozmiaru 2 w schemacie **lpzz**. Przy każdej próbie zapisz wagi odpowiednich jednostek.
2. Wypisz wszystkie możliwe próby rozmiaru 2 w schemacie **lpbz**. Przy każdej próbie zapisz wagi odpowiednich jednostek.
3. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa wartości średniej $\bar{y}$, wartość oczekiwaną $E(\bar{y})$ oraz wariancję $Var(\bar{y})$ w zależności od scheatu losowania.
4. Dyskusja: efektywność **lpzz** a **lpbz**.

Przykład 6.
Powierzchnie (w hektarach) sześciu wsi przedstawia tabela:

Wieś	A	B	C	D	E	F
Powierzchnia	760	343	657	550	480	935

1. Wypisz wszystkie możliwe próby rozmiaru 3 w schemacie **lpzz**. Przy każdej próbie zapisz powierzchnię odpowiednich jednostek.
2. Wypisz wszystkie możliwe próby rozmiaru 3 w schemacie **lpbz**. Przy każdej próbie zapisz powierzchnię odpowiednich jednostek.
3. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa wartości średniej $\bar{y}$, wartość oczekiwaną $E(\bar{y})$ oraz wariancję $Var(\bar{y})$ w zależności od scheatu losowania.
4. Dyskusja: efektywność **lpzz** a **lpbz**.

3. Statystyka opisowa i ekonomiczna - stacjonarne

3.1 Ćwiczenia - wstęp

Przykład 7.
Oszacować przeciętną procentową zawartość tłuszczu w mleku krów na podstawie danych o procentowej zawartości tłuszczu w mleku 50 krów.

Nr.	%	Nr.	%	Nr.	%	Nr.	%	Nr.	%
1	3.35	11	4.16	21	3.24	31	4.23	41	3.42
2	3.73	12	3.56	22	3.98	32	3.7	42	4.47
3	3.94	13	3.92	23	3.62	33	3.53	43	3.93
4	4.16	14	3.22	24	4.1	34	3.72	44	4.26
5	3.92	15	3.66	25	3.78	35	3.96	45	3.81
6	4.28	16	3.5	26	3.39	36	3.83	46	4.27
7	4.26	17	3.71	27	3.93	37	4.27	47	4.06
8	3.78	18	3.96	28	3.89	38	3.93	48	4.06
9	3.99	19	3.77	29	4.22	39	3.78	49	3.66
10	3.41	20	3.53	30	3.54	40	4.08	50	3.44

Skonstruować szereg rozdzielczy (od 3.2 co 0.2) i na podstawie tego szeregu również oszacował przeciętną procentowa zawartość tłuszczu w mleku krów. Porównać uzyskane wyniki.

3.2 Ćwiczenia - mierniki położenia wyznaczane z szeregu rozdzielczego

Przykład 8.
Porównać strukturę wynagrodzeń miesięcznych w przemyśle i budownictwie.

Płaca	przemysł	budownictwo
0 - 200	250	100
200 - 400	450	350
400 - 600	150	400
600 - 800	100	100
800 - 1000	50	50

- Narysować histogramy dla płac w budownictwie i przemyśle.
- Sformułować wstępne wnioski na podstawie histogramów.

- Wyznaczyć miary położenia i zinterpretować je.
- Na podstawie porównania miar położenia porównać dochody w przemyśle z dochodami w budownictwie.
- **Do domu**: wyznaczyć mierniki zróżnicowania.

3.3 Ćwiczenia - mierniki zróżnicowania oraz współczynnik koncentracji Lorenza wyznaczane z szeregu rozdzielczego

Przykład 9. (ciąg dalszy przykładu 8.)
Porównać strukturę wynagrodzeń miesięcznych w przemyśle i budownictwie.

Płaca	przemysł (n_i)	budownictwo (m_i)	$\frac{n_{(i)}}{n}$	$\frac{m_{(i)}}{m}$
0 - 200	250	100	0.25	0.10
200 - 400	450	350	0.70	0.45
400 - 600	150	400	0.85	0.85
600 - 800	100	100	0.95	0.95
800 - 1000	50	50	1.00	1.00
Suma	$n = 1000$	$m = 1000$		

Praca domowa powinna dać wyniki:

Mierniki zróżnicowania	przemysł	budownictwo
rozstęp R	800	800
odchylenie standardowe S	218	193
odchylenie przeciętne d	170	157
odchylenie ćwiartkowe Q	100	120
współczynnik zmienności V	62%	45%

- Porównać zróżnicowanie płac w przemyśle względem budownictwa.
- W której branży rozkład płac jest bardziej równomierny?

Porównanie zróżnicowania. W przemyśle zakres płac jest taki sam, jak w budownictwie ($R_{bud} = R_{przem} = 800$). Tym niemniej zróżnicowanie płac w przemyśle jest większe niż w budownictwie (odchylenia od średniej płacy w przemyśle są większe niż odchylenia od średniej płacy w budownictwie: $S_{przem}/S_{bud} = 1.13 > 1$ oraz $d_{przem}/d_{bud} = 1.08 > 1$.). Jednak biorąc pod

uwagę 50% typowych pracowników obu branż (tzn. takich, których płace mieszczą się między dolnym, a górnym kawrtylem) zauważamy, że większe zróżnicowanie jest po stronie budownictwa ($Q_{przem}/Q_{bud} = 0.83 < 1$).
Typowe obszary zmienności. Jak sama nazwa wskazuje obszary te mówią nam, jakie wartości „typowo" przyjmuje badana cecha. Gwoli ścisłości, w praktyce statystyki opisowej wyróżniamy dwa takie obszary (przedziały):

1. $(\bar{X} - S, \bar{X} + S)$ – klasyczny
2. $(Me - Q, Me + Q)$ – pozycyjny

Jeżeli rozkład badanej cechy jest jednomodalny i za bardzo nie odbiega od rozkładu symetrycznego, to ok. 70% wartości badanej cechy powinna mieścić się w pierwszym przedziale (wyjaśni się to przy prawie trzech sigm dla rozkładu normalnego). W drugim powinno być ok. 50% środkowych wartości badanej cechy. Jak można zauważyć, przedziały oparte są zarówno na miernikach położenia, jak i zróżnicowania (rozproszenia). Stąd zawarta jest w nich informacja o położeniu próby i o jej zróżnicowaniu jednocześnie. Przy czym w pierwszym przypadku dotyczy ona siedemdziesięciu procent próby, a w drugim pięćdziesięciu.
Dla przemysłu

1. $(\bar{X} - S, \bar{X} + S) = (350 - 218, 350 + 218) = (132, 568)$
2. $(Me - Q, Me + Q) = (311 - 100, 311 + 100) = (211, 411)$

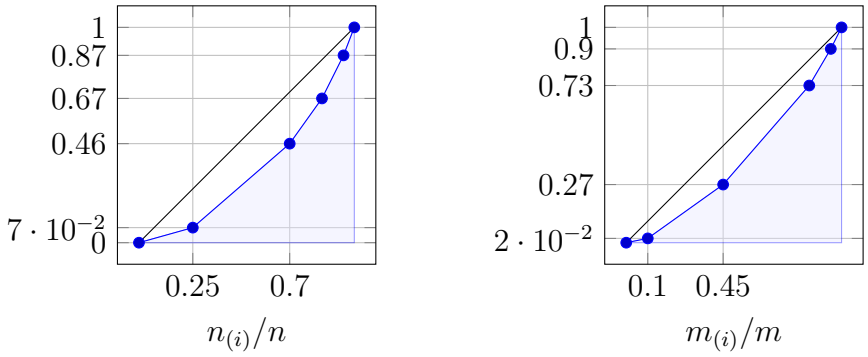
Dla budownictwa

1. $(\bar{X} - S, \bar{X} + S) = (430 - 193, 430 + 193) = (237, 623)$
2. $(Me - Q, Me + Q) = (425 - 120, 425 + 120) = (305, 545)$

W domu: Proszę narysować te przedziały na osi (powinno to pomóc w porównaniu rozkładu płac w przemyśle względem budownictwa) i na tej podstawie wyciągnąć wnioski na temat rozkładu płac w obu branżach.
Porównanie równomierności rozkładów. Nierównomierność rozdziału ogólnej sumy wartości cechy pomiędzy poszczególne jednostki zbiorowości nazywamy w statystyce *koncentracją*. Stąd w tym zadaniu zbadamy rozdział ogólnej sumy płac pomiędzy pracowników w obu branżach. W tym celu wyznaczymy współczynniki koncentracji Lorenza dla obu branż i porównamy je ze sobą. Wzór na współczynnik znajduje się w pliku:

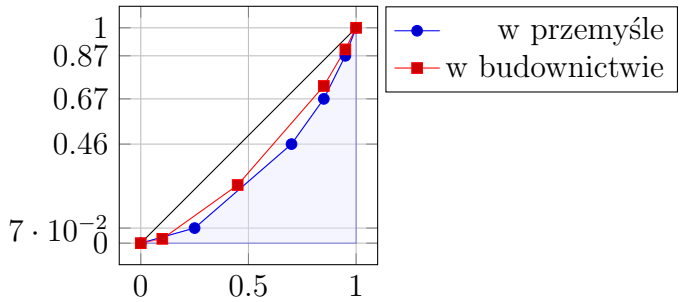
http://sjaworski.wzim.sggw.pl/zadania/pdf/z_stat.pdf (str. 40)

Należy go zastosować, co powinno dać następujące wartości współczynników koncentracji: $K_{przem} = 0.33$ oraz $K_{bud} = 0.24$. Współczynnik koncentracji dla przemysłu jest większy niż dla budownictwa. Stąd w budownictwie rozkład płac jest bardziej równomierny, niż w przemyśle. Przypomnijmy sobie histogramy płac dla obu branż: w przemyśle jest duża koncentracja małych płac. Ponadto porównajmy krzywe Lorenza:



(a) w przemyśle **(b)** w budownictwie

Rysunek 3. Krzywe koncentracji



Rysunek 4. Porównanie krzywych koncentracji

Krzywa koncentracji dla budownictwa jest bardziej zbliżona do prostej $y = x$ niż dla przemysłu. W ten sposób można zauważyć, że rozkład płac jest bardziej równomierny w budownictwie. Współczynnik koncentracji to iloraz pola obszaru a do $a + b$, tzn. współczynnik koncentracji $K = \frac{a}{a+b}$.
Zwróćmy uwagę na pracowników o płacach do 400zł. W przemyśle jest ich 70%. Przypada na nich 46% całej kwoty przeznaczonej na płace. W budow-

nictwie jest ich znacznie mniej, bo 45%. Przypada na nich 25% całej kwoty przeznaczonej na płace.

Zadania do domu:

Zadanie 5.
Wzorując się na przykładach 8–9 proszę zrobić zadania 217 oraz 218 ze zbioru http://sjaworski.wzim.sggw.pl/zadania/pdf/z_stat.pdf (str. 43). Proszę przygotować raport zapisując go w formacie pdf. Nazwa pliku ma być w formacie: stat-nr indeksu-z5.pdf (na przykład stat-980234-z5.pdf).

3.4 Ćwiczenia - wskaźniki dynamiki zmian

Indeksy agregatowe

Przykład 10.
Przedsiębiorstwo branży dziewiarskiej produkuje w trzech zakładach odpowiednio: w zakładzie A dzianinę(w metrach bieżących), w zakładzie B dresy (w sztukach) i w zakładzie C włóczkę bawełnianą (w kilogramach).

Zakład	Wielkość eksportu		Cena jednostkowa	
	1991	1992	1991	1992
dzianina	50	50	30	45
dresy	10	20	60	80
włóczka	20	15	20	40

Przeprowadzić wszechstronną analizę dynamiki eksportu trzech produktów.

Celem zadania jest odpowiedź na pytania:

1. Jaki wpływ na zmianę wartości eksportu wymienionych produktów w 1992 roku miała zmiana wielkości produkcji oraz zmiana cen w stosunku do roku 1991?
2. Jaki wpływ na zmianę wartości eksportu badanego *agregatu* (zbioru) produktów miała zmiana cen w 1992 roku w stosunku do 1991?
3. Jaki wpływ na zmianę wartości eksportu badanego *agregatu* produktów miała zmiana wielkości produkcji w 1992 roku w stosunku do 1991?

W tym celu zostaną wyznaczone odpowiednie indeksy agregatowe oraz zinterpretowane:

1. Wyznaczam wartość eksportu agregatu produktów w roku 1991 (oznaczam ją przez w_{00}):

$$w_{00} = 50 \cdot 30 + 10 \cdot 60 + 20 \cdot 20.$$

Wyznaczam wartość eksportu agregatu produktów w roku 1992 (oznaczam ją przez w_{11}):

$$w_{11} = 50 \cdot 45 + 20 \cdot 80 + 15 \cdot 40.$$

Wyznaczam indeks zmiany wartości

$$I_w = w_{11}/w_{00} = 1.78.$$

Interpretacja: Wartość eksportu agregatu produktów wzrosła o 78% w roku 1992 w stosunku do roku 1991. Wzrost był spowodowany zmianami wielkości eksportu oraz zmianami cen.

2. Gdyby w obu latach wyeksportowano te same ilości produktów, to można by powiedzieć, że ta 78-procentowa zmiana została wywołana zmianami cen. Ponieważ tak nie jest, mogę zrobić jedno z dwóch umownych założeń:

   (a) w obu badanych latach wyeksportowano te same ilości produktów, co w roku 1992,

   (b) w obu badanych latach wyeksportowano te same ilości produktów, co w roku 1991.

W pierwszym przypadku indeks zmiany wartości nazywa się indeksem Laspayresa zmiany cen, a w drugim Paaschego. Indeks Laspayresa oznaczę przez I_p^L, a Paaschego przez I_p^P.
Niech w_{01} oznacza wartość eksportu agregatu produktów w 1992 roku przy założeniu, że w tym roku wyeksportowano te same ilości co w 1991. Niech w_{10} oznacza wartość eksportu agregatu produktów w 1992 roku przy założeniu, że w tym roku wyeksportowano te same ilości co w 1992. Wtedy

$$w_{01} = 50 \cdot 45 + 10 \cdot 80 + 20 \cdot 40.$$

$$w_{10} = 50 \cdot 30 + 20 \cdot 60 + 15 \cdot 20.$$

Zatem

$$I_p^L = w_{01}/w_{00} = 1.54, \quad I_p^P = w_{11}/w_{10} = 1.48.$$

Interpretacja indeksu zmiany cen Laspayresa: W roku 1992 wartość eksportu agregatu produktu wzrosła o 54% pod wpływem zmiany cen, przy umownym założeniu, że w obu badanych latach eksportowano te same ilości, co w roku 1991.
Interpretacja indeksu zmiany cen Paaschego: W roku 1992 wartość eksportu badanego agregatu produktu wzrosła o 48% pod wpływem zmiany cen, przy umownym założeniu, że w obu badanych latach wyeksportowano te same ilości, co w roku 1992.
Możemy połączyć oba indeksy w jeden wyznaczając z nich średnią geometryczną. Otrzymujemy w ten sposób Indeks Fischera zmiany cen:

$$I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P} = 1.51,$$

co w praktyce interpretujemy krótko: ceny eksportowanych produktów wzrosły o 51%.

3. Gdyby w obu latach obowiązywały te same ceny produktów, to można by powiedzieć, że ta 78-procentowa zmiana została wywołana zmianami wielkości eksportu. Ponieważ tak nie jest, mogę zrobić jedno z dwóch umownych założeń:

   (a) w obu badanych latach obowiązywały te same ceny, co w roku 1992,
   (b) w obu badanych latach obowiązywały te same ceny, co w roku 1991.

   W pierwszym przypadku indeks zmiany wartości nazywa się indeksem Laspayresa zmiany ilości, a w drugim Paaschego. Indeks Laspayresa oznaczę przez I_q^L, a Paaschego przez I_q^P.
   Zatem

$$I_q^L = w_{10}/w_{00} = 1.20, \quad I_q^P = w_{11}/w_{01} = 1.16.$$

   Interpretacja indeksu zmiany ilości Laspayresa: W roku 1992 wartość eksportu agregatu produktu wzrosła o 20% pod wpływem zmiany wielkości eksportu tych produktów, przy umownym założeniu, że w obu badanych latach obowiązywały ceny z roku 1991.
   Interpretacja indeksu zmiany ilości Paaschego: W roku 1992 wartość eksportu agregatu produktu wzrosła o 16% pod wpływem zmiany wielkości eksportu, przy umownym założeniu, że w obu badanych latach obowiązywały te same ceny, co w roku 1992.

Indeks Fishera zmiany ilości

$$I_q^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P} = 1.18$$

interpretujemy krótko: w 1992 roku wielkość eksportu badanego agregatu produktów wzrosła o 18% w stosunku do roku poprzedniego.

Średnie tempo zmian

Przykład 11.
Obserwowano wielkość zbiorów pszenicy latach 1980–1988:

Rok	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1989
Zbiory	7.5	7.8	8.2	8.2	8.4	8.5	8.7	9.1	9.2

Oszacować średnie tempo zmian zbiorów pszenicy.

Średnie tempo zmian wynosi $\sqrt[9]{9.2/7.5} = 1.02296 \approx 1.02$.
Interpretacja: W latach 1980-1988 zbiory pszenicy rosły średnio o 2% w skali roku.

Zadania do domu:

Zadanie 6.
Wykazać następujące równości:

$$I_w = I_p^L \cdot I_q^P$$
$$I_w = I_p^P \cdot I_q^L$$
$$I_w = I_p^F \cdot I_q^F$$

Zadanie 7.
Zadanie 5 ze zbioru http://sjaworski.wzim.sggw.pl/zadania/pdf/z_stat.pdf.
Wskazówka: W kolumnie „Dynamika wielkości dostaw (1971=100)” są ilorazy $100 \cdot q_{i1}/q_{i0},\ i = 1, 2, 3, 4,$. W pozostałych kolumnach są wartości (cena * ilość). Stąd indeksy agregatowe dają się wyznaczyć.

Zadanie 8.
Zadanie 6, 182, 185 ze zbioru
http://sjaworski.wzim.sggw.pl/zadania/pdf/z_stat.pdf.

Zadanie 9.
Zadanie 191, 192 ze zbioru
http://sjaworski.wzim.sggw.pl/zadania/pdf/z_stat.pdf.